Application des lois de Newton et des lois de Kepler

Comment déterminer les caractéristiques des mouvements à partir des lois de Newton et de Kepler ?

1) Quel est le mouvement d'un système dans un champ uniforme ?

→ T.P. : Promenons-nous dans les champs

1) Cas d'un objet dans un champ de pesanteur uniforme

Toute étude de mouvement nécessite de définir le système et de choisir un référentiel adapté.

Par exemple, dans le cas du mouvement d'une balle de masse *m* :
- le **système étudié** est la balle, modélisée par son centre G ;
- le **référentiel choisi** est un référentiel terrestre considéré galiléen.

L'application de la deuxième loi de Newton nécessite de faire l'inventaire des forces extérieures exercées sur le système

D'après l'exemple précédent :
Les forces extérieures exercées sur le point G sont :
- le poids P de la balle
- les forces exercées par l'air $F_{air/balle}$

Mais les valeurs des forces exercées par l'air étant très faible devant celle du poids, on négligera les frottements, le système n'est soumis qu'à son poids, il est donc en chute libre.

Dans le référentiel terrestre choisi, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse de la balle ne variant pas au cours du temps, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Or, on a $\sum \vec{F} = \vec{P} = m \cdot \vec{g}$.

D'où $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$, soit $\vec{a} = \vec{g}$.

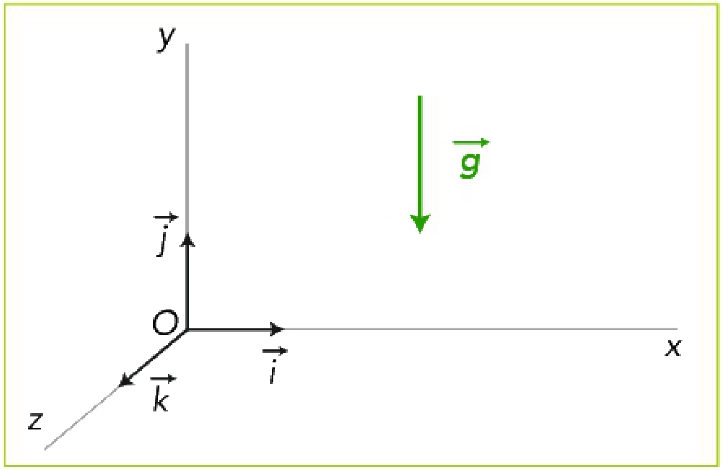
Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (doc. 2), les coordonnées du vecteur $\vec{g}$ sont :

$$\vec{g} \begin{pmatrix} g_x = 0 \\ g_y = -g \\ g_z = 0 \end{pmatrix}$$

donc celles du vecteur $\vec{a}$ sont :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{pmatrix}$$

La valeur de g dépend du lieu où l'on se trouve. On utilisera une valeur moyenne égale à $9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



Doc. 2 Représentation du vecteur champ de pesanteur dans le repère choisi.

Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse. Donc :

La <u>détermination du vecteur vitesse</u> nécessite de rechercher la <u>primitive par rapport au temps</u> de chaque coordonnée du vecteur accélération en tenant compte des coordonnées du vecteur vitesse initiale v_0.

- Le mouvement de la balle s'effectuant dans une zone limitée de l'espace, on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme, c'est-à-dire que sa direction, son sens et sa valeur g sont constants.

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi, les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = C_x \\ v_y = -g \cdot t + C_y \\ v_z = C_z \end{pmatrix}$$

où C_x, C_y et C_z sont des constantes d'intégration.

- Ces constantes vont être déterminées à partir des coordonnées de la vitesse initiale :

$$\vec{v_0}\begin{pmatrix} v_{x_0} = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_{y_0} = v_0 \cdot \sin\alpha \\ v_{z_0} = 0 \end{pmatrix}$$

Par **identification** des coordonnées du vecteur $\vec{v_0}$ avec celles du vecteur $\vec{v}$ à la date $t = 0$, on trouve :

$$C_x = v_0 \cdot \cos\alpha, \qquad C_y = v_0 \cdot \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad C_z = 0.$$

- Les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ à toute date t sont donc :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\alpha \\ v_z = 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position OG. Donc :

La détermination du vecteur position nécessite de rechercher la primitive par rapport au temps de chaque coordonnée du vecteur vitesse en tenant compte des coordonnées du vecteur position initiale OG_0.

- Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OG}$ sont :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + D_x \\ y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + D_y \\ z = D_z \end{pmatrix}$$

où D_x, D_y et D_z sont des constantes d'intégration.

- Ces constantes vont être déterminées à partir des coordonnées de la position initiale :

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{pmatrix}$$

Par **identification** des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OG_0}$ avec celles du vecteur $\overrightarrow{OG}$ à la date $t = 0$, on trouve : $D_x = 0$, $D_y = 0$ et $D_z = 0$.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OG}$ à la date t sont donc :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = -\dfrac{1}{2}\, g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t \\ z = 0 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées x et y dépendent du temps ; elles sont appelées **équations horaires** du mouvement.
La coordonnée z étant constamment nulle, la trajectoire est plane.

La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours de son mouvement

La détermination de l'équation de la trajectoire $y = f(x)$ nécessite d'éliminer le temps en combinant les équations horaires du mouvement.

- De la première équation horaire, on obtient $t = \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$

En substituant t dans la seconde équation, il vient :

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

Cette relation s'écrit également : $y = -\dfrac{g}{2\,(v_0 \cdot \cos \alpha)^2} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x.$

- L'équation de la trajectoire est une fonction polynôme de degré 2. La trajectoire de la balle est bien une portion de parabole

Elle dépend des conditions initiales (valeur de la vitesse initiale v_0, angle α de lancement et position initiale)

BILAN à retenir :

Tous les systèmes étudiés sont assimilés à des points matériels : toute leur masse est regroupée au centre de gravité. Toute étude de mouvement nécessite :

- de définir le système et de choisir un référentiel adapté
- d'appliquer la 2ème loi de Newton après avoir fait l'inventaire des forces extérieurs exercées sur le système afin de déterminer le vecteur accélération

Champ uniforme	Pesanteur $\vec{g}$	Électrostatique $\vec{E}$
Vecteur accélération	$\vec{a} = \vec{g}$	$\vec{a} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m}$

- de déterminer le vecteur vitesse en recherchant la primitive par rapport au temps de chaque coordonnée du vecteur accélération et en utilisant les coordonnées du vecteur vitesse initiale pour prendre en compte les conditions initiales
- de déterminer le vecteur position en recherchant la primitive par rapport au temps de chaque coordonnée du vecteur vitesse et en utilisant les coordonnées du vecteur position initiale pour prendre en compte les conditions initiales.

Les coordonnées x et y du vecteur position dépendent du temps ; elles sont appelées équations horaires du mouvement.
La détermination de l'équation de la trajectoire $y = f(x)$ nécessite d'éliminer le temps en combinant les équations horaires.

2) Comment décrire le mouvement des satellites et des planètes ?

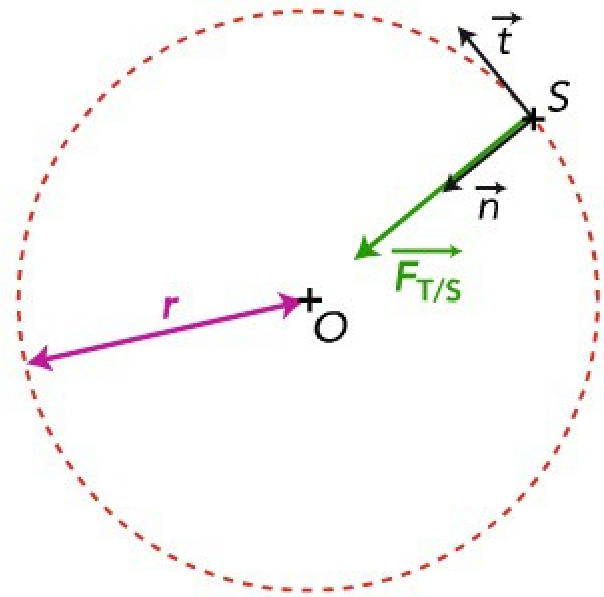
1) Description par la 2ème loi de Newton

a) Système, référentiel et bilan des forces

On étudie le mouvement d'un satellite S de masse m, assimilé à un point matériel, en orbite autour de la Terre de centre O et de masse M. On se place dans une orbite circulaire de rayon $r = OS$.

Système étudié : le satellite S.
Référentiel choisi : référentiel de la Terre considéré galiléen

On utilise un repère mobile (S ; t, n) lié au satellite et dont les axes sont dans le plan du mouvement.



Inventaire des forces extérieurs sur le satellite :
- la force d'attraction gravitationnelle exercée par la planète $F_{T/S}$

Donc $\sum$**F = F**$_{\mathbf{T/S}}$

b) La 2ème loi de Newton

L'application de la **deuxième loi de Newton** conduit à $\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{F_{T/S}}}{m}$.

La force $\vec{F}_{T/S}$ a pour expression :

$$\overrightarrow{F_{T/S}} = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2} \cdot \vec{n}$$

Il vient donc $\vec{a} = \dfrac{G \cdot \dfrac{m \cdot M_T}{r^2}}{m} \cdot \vec{n}$, soit $\vec{a} = \dfrac{G \cdot M_T}{r^2} \cdot \vec{n}$.

Le vecteur accélération est centripète, c'est-à-dire qu'il est dirigé vers le centre de la trajectoire.

$$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}, \quad \text{avec} \quad \vec{a_T} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{a_N} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$$

v est la valeur de la vitesse.

Par identification, on en déduit : $\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G \cdot M_T}{r^2} \end{cases}$

- L'égalité $\dfrac{dv}{dt} = 0$ implique que la valeur de la vitesse v est constante. Ce mouvement circulaire est donc **uniforme**.
- L'égalité $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G \cdot M_T}{r^2}$ implique que la valeur de la vitesse est :

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}.$$

La valeur de la vitesse du satellite est indépendante de sa masse, mais dépend du rayon $r = R_T + h$ de la trajectoire Elle diminue lorsque ce rayon augmente

- La durée T pour effectuer un tour est appelée **période de révolution**. Elle est égale au périmètre de la trajectoire circulaire divisé par la valeur de la vitesse pour un mouvement uniforme.

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{r^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}}$$

La période de révolution du satellite est indépendante de sa masse, mais dépend du rayon de la trajectoire. Elle augmente lorsque ce rayon augmente.
L'homogénéité de ces relations peut être vérifiée par une analyse dimensionnelle

- Cette étude réalisée pour un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de masse M_T peut être généralisée à tout satellite ou planète en orbite circulaire autour d'un astre de masse M.

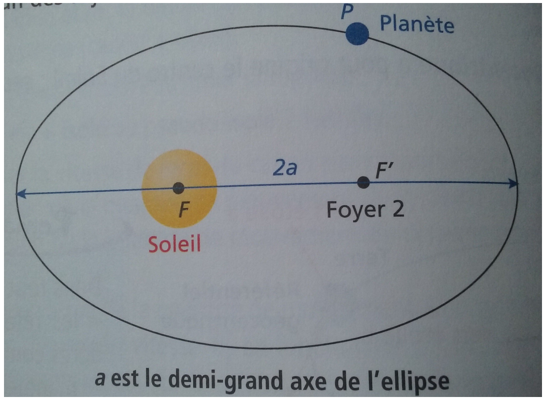
A retenir : Dans l'approximation des trajectoires circulaires, l'application de la deuxième loi de Newton à l'étude du mouvement d'un satellite ou d'une planète permet de montrer que le mouvement est uniforme et d'établir l'expression de la valeur de sa vitesse et de sa période de révolution.

2) Description par les lois de Kepler : définitions

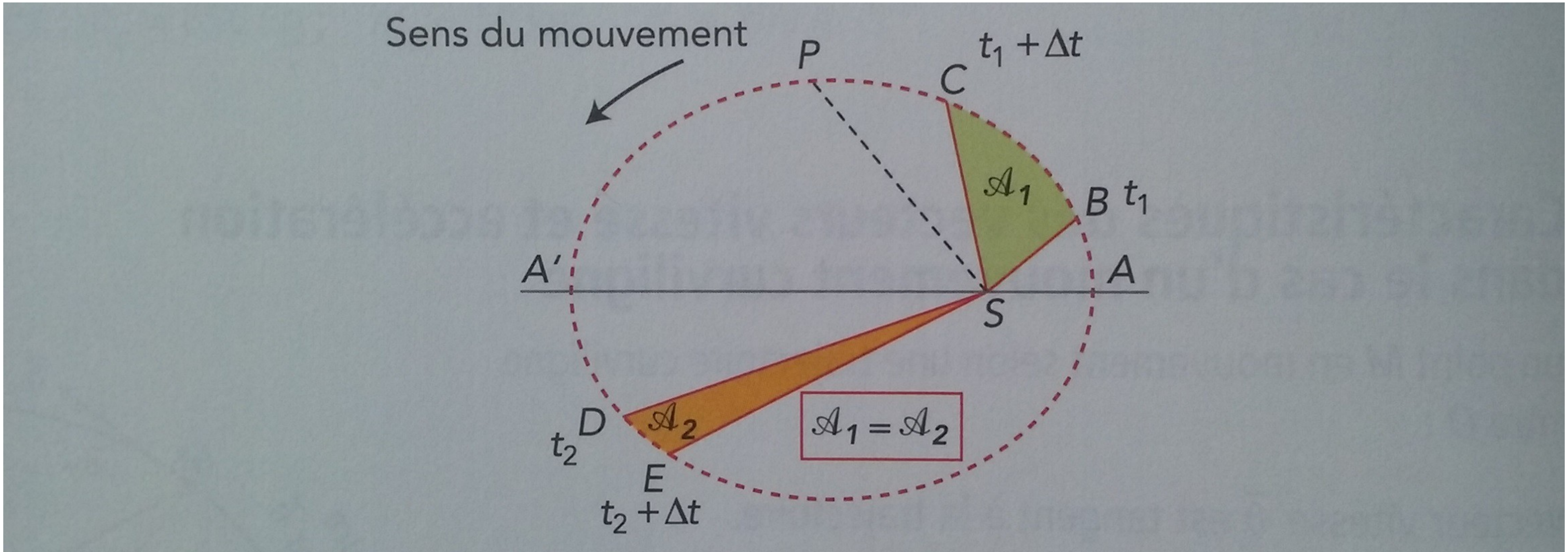
L'astronome Johannes KEPLER (1571-1630) a formulé 3 lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil.

Pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil, on se place dans le référentiel héliocentrique

1ère loi de Kepler : La trajectoire du centre *P* d'une planète autour du Soleil est une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers *F*.



2ème loi de Kepler : Le segment reliant les centres du Soleil et de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.



Pendant une même durée Δt, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ balayées par le segment [SP] sont égales.

Remarques :

Le point A sur le schéma précédent est appelé périgée : c'est le point le plus proche de l'étoile solaire.

Le point A' sur le schéma précédent est appelé apogée: c'est le point le plus éloigné de l'étoile solaire.

La vitesse de la planète est maximale au périgée et minimale à l'apogée.

3ème loi de Kepler : Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution T et le cube du demi-grand axe a de la trajectoire est constant : Donc $\mathbf{T^2 / a^3}$ **est constant**.

3) Description par les lois de Kepler : application avec le mouvement d'un satellite de la Terre

On se place dans le référentiel géocentrique. Un satellite décrit une orbite elliptique dans un plan contenant le centre de la Terre.

- Vitesse et période d'un satellite en orbite circulaire : cas d'un mvt uniforme.

Dans le référentiel géocentrique, considéré comme galiléen, un satellite S de masse m est soumis à la seule force d'attraction gravitationnelle F exercée par la Terre de masse M_T.

- Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la trajectoire.

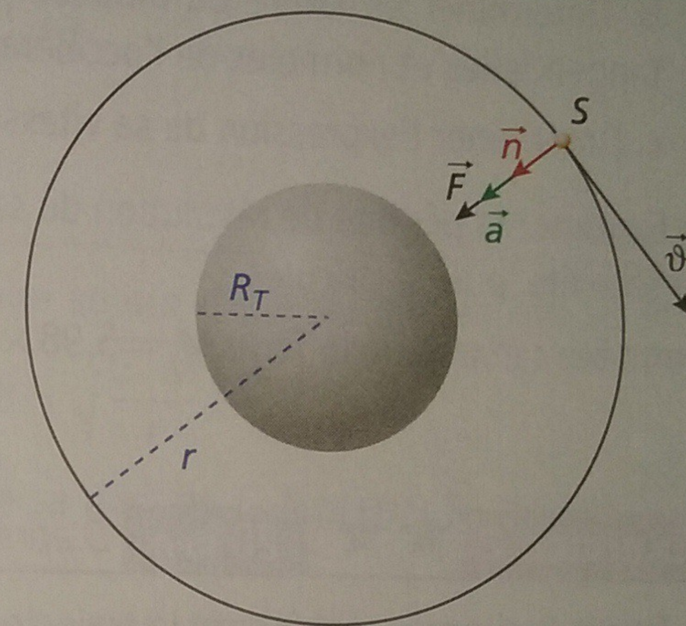
Notons :

$\vec{a}$ l'accélération du satellite ;

R_T : le rayon de la Terre ;

r : la distance entre les centres de gravité de la Terre et du satellite ;

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$: la constante de gravitation universelle.



Expression du vecteur accélération :

d'après la 2e loi de Newton : $\vec{F} = G \cdot \dfrac{m \cdot M_T}{r^2} \cdot \vec{n} = m \cdot \vec{a}$

d'où $\vec{a} = G \cdot \dfrac{M_T}{r^2} \vec{n}$.

- On déduit (voir exercice 1) de cette expression que :

– le mouvement du satellite est uniforme ;

– $\vartheta = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{r}}$; **ϑ est la vitesse du satellite** sur son orbite : elle dépend de l'altitude h du satellite ($h = r - R_T$), mais non de sa masse.

- $T = \dfrac{2\pi \cdot r}{\vartheta}$ soit $T = 2\pi . \sqrt{\dfrac{r^3}{G \cdot M_T}}$ d'où $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$; ***T* est la période** de révolution du satellite, c'est-à-dire la durée d'un tour sur son orbite ; son expression vérifie la 3e loi de Kepler.